Lycée Laymoune
Niveau : 2ème Bac Pro

Devoir Maison n° : 1
1ère Session – 2019-2020

EX : 1 (limite et continuité :)

1°) calculer les limites : a) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{2x^2 - 4x + 2}{1 - x} \right)$

b) $\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{2x - 3}{x - 1}$; c) $\lim_{x \underset{>}{\to} 1/2} \frac{x - 3}{1 - 2x}$ d) $\lim_{x \to 2} \frac{-3x + 1}{(x - 2)^2}$; e) $\lim_{x \underset{<}{\to} -1} \frac{-x + 3}{x^2 + 3x + 2}$

2°) Mq l'éq : $x^5 - 2x^3 + x^2 - 8 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle : $I = [0 ; 2]$

EX : 2

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{4(x - 2)}$$

1°) Déterminer D_f et calculer les limites de f dans les bornes de D_f.

2°- a) vérifier que :
$(\forall x \in D_f)$: $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x - 2}$

2°- b) Mq la droite (D) d'éq : $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

2°- c) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (D).

3°- a) Mq : $(\forall x \in D_f)$; $f'(x) = \frac{x(x-4)}{4(x-2)^2}$

3°- b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variation de f.

4°) Etudier la concavité de $(\mathcal{C}_f)$

5°) Vérifier que le point $S\left(2 ; \frac{5}{4}\right)$ est centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$

6°- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'éq : $f(x) = 0$

6°- b) Construir $(\mathcal{C}_f)$.

7°) Soit (H) la droite d'éq : (H) : $y = \frac{1}{4}x$

7°- a) Mq le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et (H) a pour abscisse : $x_0 = \frac{2}{3}$.

7°- b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $(x \in D_f)$; $f(x) \leq \frac{1}{4}x$

EX : 3 ▸ Suites numériques :

(u_n) définie par : $u_0 = 2$ et :
$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{3u_n - 2}$

1°/ calculer u_1 et u_2.

2°/ on pose : $v_n = \frac{u_n - 2}{1 - u_n}$.

2°- a) Calculer : v_0.

2°- b) Mq : $v_{n+1} = \frac{1 - 2u_n}{1 - u_n}$ et en déduire que : $v_{n+1} - v_n = 3$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2°- c) Mq : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = 3n$.

3°- a) Mq : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{v_n + 2}{v_n + 1}$.

3°- b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \frac{3n + 2}{3n + 1}$.

4°) Calculer : $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Lycée Laymoune — Année : 2019 2020

Corrigé du devoir maison

Niveau : 2ème BAC.Pro

أذ. محمد يزوغ

EX : 1 : leçon limite et continuité

1°) – a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2-4x+2}{1-x}$ un calcul directe donne : " $\dfrac{0}{0}$ " F.I

on peut factoriser $2x^2-4x+2$ par $(x-1)$. on fait une division euclidienne ; ou bien on calcule Δ :

$$2x^2-4x+2$$

$$\Delta = 16-16=0$$

donc : $2x^2-4x+2 = 2\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$

avec $\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-4}{4} = -1$

donc : $\dfrac{2x^2-4x+2}{1-x} = \dfrac{2(x-1)^2}{1-x}$

$$= \frac{2(x-1)}{-1}$$

puis : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2-4x+2}{1-x} = \dfrac{0}{-1} = \boxed{0}$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{2x-3}{x-1} = " \dfrac{2-3}{0^-} " = " \dfrac{-1}{0^-} " = \boxed{+\infty}$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 1/2 \\ >}} \dfrac{x-3}{1-2x} = " \dfrac{\frac{1}{2}-3}{0} " = " \dfrac{\left(\frac{-5}{2}\right)}{0} "$

pour déterminer le signe de 0 on fait un tableau :

x		$1/2$	
$1-2x$	+	0	−

donc $1-2x$ égale à un 0^- lorsque $x \underset{>}{\to} 1/2$

par suite : $\lim\limits_{\substack{x \to 1/2 \\ >}} \dfrac{x-3}{1-2x} = \dfrac{\left(\frac{-5}{2}\right)}{0^-} = \boxed{+\infty}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-3x+1}{(x-2)^2} = " \dfrac{-6+1}{0^+} " = " \dfrac{-5}{0^+} " = \boxed{-\infty}$

e) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{-x+3}{x^2+3x+2} = " \dfrac{4}{0} "$

on cherche le signe de 0 :

on a : x^2+3x+2

$\Delta = 9-4\times 2 = 1$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-1}{2} = -2$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = -1$

donc :

x		-2		-1	
x^2+3x+2	+	0	−	0	+

$x \underset{<}{\to} -1$ donc le signe de 0 est "−"

ainsi : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{-x+3}{x^2+3x+2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$

2°) $x^5-2x^3+x^2-8=0$

on pose : $f(x) = x^5-2x^3+x^2-8$

avec : $x \in [0;2]$

f est continue sur $[0;2]$

on a : $f(0) = -8 < 0$

et $f(2) = 2^5-2\times 2^3+2^2-8$

$= 32-16+4-8 = 12 > 0$

donc $f(0)\times f(2) = -8\times 12 \leq 0$

et d'après le théorème des valeurs intermédiaire : $\exists\, c \in [0,2]$; $f(c)=0$

c-à-d $x^5-2x^3+x^2-8=0$ admet au moins une solution $c \in [0,2]$

EX : 2

$f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{4(x-2)}$

1°) Soit $x \in \mathbb{R}$; $x \in D_f \Leftrightarrow x-2 \neq 0$

c-à-d $x \neq 2$ donc :

$D_f = \mathbb{R}-\{2\} = \boxed{]-\infty;2[\,\cup\,]2;+\infty[}$

on a : $D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

les bornes de D_f sont : $(-\infty ; 2^- ; 2^+ ; +\infty)$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^2}{4x} \quad (\text{car } f \text{ est rationnelle})$$

$$= \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{x}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{+\infty} f = +\infty \\ \lim\limits_{-\infty} f = -\infty \end{cases}$$

on a : $\begin{cases} x > 2 \Rightarrow x-2 > 0 \\ x < 2 \Rightarrow x-2 < 0 \end{cases}$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) = \text{"}\frac{4}{0^+}\text{"} = +\infty$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = \text{"}\frac{4}{0^-}\text{"} = -\infty$

résumé :

x_0	$-\infty$	2^-	2^+	$+\infty$
$\lim\limits_{x_0} f$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

2° – a) soit $x \in D_f$. on a :

$$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{x-2} = \frac{x(x-2) + 3(x-2) + 4}{4(x-2)}$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 3x - 6 + 4}{4(x-2)} = \frac{x^2 + x - 2}{4(x-2)} = f(x)$$

2° – b) Soit : $(D) : y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

d'après 2° – a) on a : $[f(x) - y] = \frac{1}{x-2}$

donc : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

donc la droite (D) est asymptote oblique à $(\mathscr{C}_f)$ lorsque $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$

2° – c) on cherche le signe de $f(x) - y$

on a : $x > 2 \Rightarrow \frac{1}{x-2} > 0$: donc $(\mathscr{C}_f)$ est au dessus de (D),

$x - 2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x-2} < 0$: donc $(\mathscr{C}_f)$ est au dessous de (D).

3° – a) f est dérivable sur D_f (car rationnelle) donc pour tout $x \in D_f$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2 + x - 2}{x-2}\right)'$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2 + x - 2) \times 1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{2x^2 - 4x + x - 2 - x^2 - x + 2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{4(x-2)^2}$$

3° – b) soit $x \in D_f$ donc $(x-2)^2 > 0$

et $f'(x)$ a le même signe que $x(x-4)$:

x		0		4	
$x(x-4)$	+	0	−	0	+

Donc le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$

Rq : ① on a $f(0) = \frac{1}{4}$ et $f(4) = \frac{9}{4}$

② on a utiliser les limites aux bornes : question 1°).

4°) Pour étudier la concavité de $(\mathscr{C}_f)$ on doit calculer f''. Soit $x \in D_f$ on a :

$$f''(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{(x-2)}{4(x-2)^4} \times [(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x)]$$

$$= \frac{1}{4(x-2)^3} \times [8] = \frac{2}{(x-2)^3}$$

donc $f''(x)$ a le même signe que $(x-2)$

x		2	
$f''(x)$	−	‖	+
concavité de $(\mathscr{C}_f)$	concave	‖	convexe

5°) on doit vérifier les deux conditions

$$(\forall x \in D_f) : \begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

avec $(a;b)$ sont les coordonnées de S

càd : $\left| a = 2 \text{ et } b = \frac{5}{4} \right|$

1er Cond : $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 2$

$\Leftrightarrow 4-x \neq 4-2$ càd $4-x \neq 2$

donc : $\forall x \in D_f$; $4-x \in D_f = \mathbb{R}-\{2\}$

2ème Cond : On compare : $2b-f(x)$ et $f(2a-x)$

on a : $f(2a-x) = f(4-x) = \dfrac{(4-x)^2+(4-x)-2}{4\times(4-x-2)}$

$= \dfrac{16-8x+x^2+2-x}{4(2-x)} = \boxed{\dfrac{x^2-9x+18}{4(2-x)}}$

$2b-f(x) = 2\times\frac{5}{4} - \dfrac{x^2+x-2}{4(x-2)}$

$= \dfrac{10(x-2)-x^2-x+2}{4(x-2)} = \dfrac{-x^2+9x-18}{4(x-2)}$

$= \dfrac{x^2-9x+18}{4(2-x)} = f(2a-x)$

donc $f(2a-x) = 2b-f(x)$; $(\forall x \in D_f)$

Conclusion : $S(2;\frac{5}{4})$ est centre de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.

6°-a) soit $x \in \mathbb{R}$ on a :

$f(x)=0 \Leftrightarrow x \in D_f$ et $\dfrac{x^2+x-2}{4(x-2)} = 0$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$; $\Delta = 1+8 = 9 > 0$

et $x_1 = \frac{-1-3}{2} = \boxed{-2}$; $x_2 = \frac{-1+3}{2} = \boxed{1}$

donc les solutions sont : $\{-2;1\}$

[c-à-d que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe (Ox) aux points d'abscisses : -2 et 1]

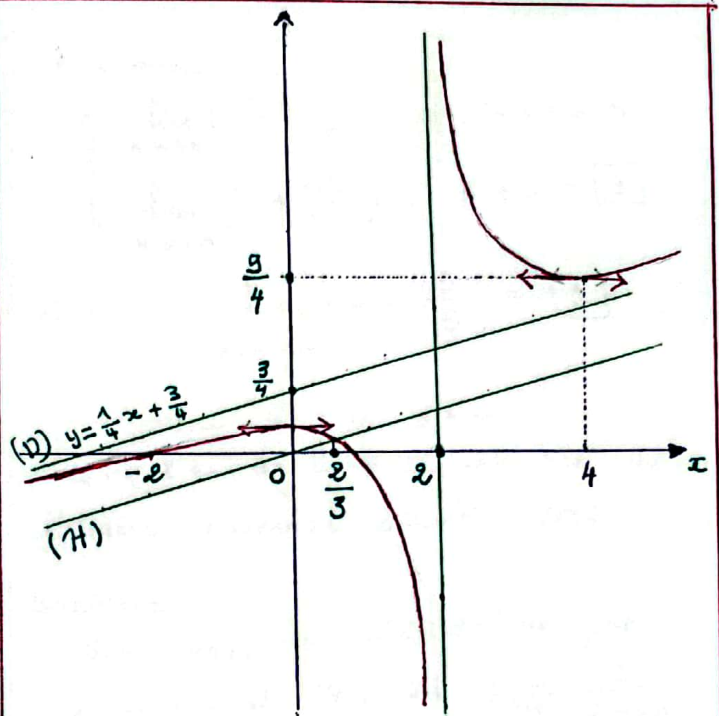
6°-b) voir plus loin. (à droite → ↑)

7°-a) il suffit de résoudre l'éq :

$f(x) = \frac{1}{4}x$ càd : $4f(x)-x=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-2}{x-2} - x = 0 \Leftrightarrow 3x-2=0$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}$ donc l'unique point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec $(\mathcal{H})$ a pour abscisse : $x_0 = \frac{2}{3}$.



7°-b) Résolution graphique :

on cherche les morceaux de $(\mathcal{C}_f)$ qui se trouvent au dessous de : (H) puis on lit les abscisses des points appartenant à ces morceaux ; on trouvent :

$f(x) \leq \frac{1}{4}x \Leftrightarrow x \in [\frac{2}{3};2[$

donc l'ensemble des solutions : $[\frac{2}{3};2[$

EX: 3 $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \dfrac{4u_n-3}{3u_n-2}$

$u_0 = 2$

1°) $u_1 = \dfrac{4\times(2)-3}{3\times(2)-2} = \boxed{\frac{5}{4}}$

$u_2 = \dfrac{4(\frac{5}{4})-3}{3(\frac{5}{4})-2} = \dfrac{5-3}{\frac{15-8}{4}} = 2\times\frac{4}{7} = \boxed{\frac{8}{7}}$

2°) $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \dfrac{u_n-2}{1-u_n}$

2°-a) $v_0 = \dfrac{u_0-2}{1-u_0} = \boxed{0}$ car $u_0 = 2$

2°-b) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-2}{1-u_{n+1}}$

$\dfrac{\frac{4u_n-3}{3u_n-2}-2}{1-\frac{4u_n-3}{3u_n-2}} = \dfrac{4\times u_n-3-2(3u_n-2)}{(3u_n-2)-(4u_n-3)}$

$= \dfrac{4u_n-3-6u_n+4}{3u_n-2-4u_n+3}$

$\Rightarrow \quad v_{n+1} = \dfrac{1-2u_n}{1-u_n}$

Déduction : on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1-2u_n}{1-u_n} - \dfrac{u_n - 2}{1-u_n}$

$= \dfrac{1-2u_n - u_n + 2}{1-u_n} = \dfrac{3(1-u_n)}{1-u_n} = \boxed{3}$

2°- c) D'après 2°- b) $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison : $r = 3$ (car : $v_{n+1} - v_n = 3 = r$)

donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times r$
$= 0 + n \times 3$

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = 3n$

3°- a) on a : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \dfrac{u_n - 2}{1-u_n}$

donc : $v_n \times (1-u_n) = u_n - 2$

$\Rightarrow v_n - v_n u_n = u_n - 2$

$\Rightarrow v_n + 2 = u_n(1+v_n)$

$\Rightarrow \dfrac{v_n + 2}{1+v_n} = u_n$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \dfrac{v_n + 2}{v_n + 1}$

3°- b) Déduction : on remplace dans 3°- a) le terme v_n par son expression trouvé dans 2°-c).

on obtient : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \dfrac{3n+2}{3n+1}$

4°) Calculons la limite : $\lim u_n$;

on a : $\forall n \geq 1$; $u_n = \dfrac{\frac{3n+2}{n}}{\frac{3n+1}{n}}$

$= \dfrac{3 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}}$

et comme :

$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3 + 0 = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3 + 0 = \boxed{3} \end{cases}$

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{3} = \boxed{1}$

— * fin * —

Req : l'ex de la suite est tiré de l'examen national : BAC-Pro 2018.

Exercice

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = -1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$

1°- a) Mq : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n < 1$

1°- b) Mq (u_n) est croissante (strictement)

2°) on pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = \dfrac{2}{1-u_n}$

2°- a) Mq $(v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

2°- b) Calculer v_n en fonction de n et en déduire que :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}$.

3°- a) Mq : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$;
$0 < 1 - u_n < \dfrac{1}{n}$.

3°- b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Bon Courage